数理解析研究所講究録
975巻 1996年 85-90

確率過程より Non-Commutative Conditional Expectations

梅垣壽春
明星大学　情報学部

Non-Commutative Conditional Expectations は 1954 年に筆者 [8] が非可換確率論の新たな確率概念を目差して導入し、それを巡って一連の成果を推進した。本稿に於いては、一般の確率過程を Non-Commutative Operator Conditional Expectations の離散的な場合に関連付ける Formulation を論じる。

§1. 積分作用素

一般に複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をその要素と共に

$$\mathcal{H} = \{u, v, x, y, \cdots, \varphi, \psi, \cdots\}$$

で表し、そこでの内積を $<\cdot,\cdot>$, 係数（複素数）を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ などによって表す。

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{H}\text{上の有界線形作用素の全体}$$

とし、$\forall x, y, \varphi \in \mathcal{H}$ に対して

$$(x \otimes \bar{y})\varphi = < y, \varphi > x$$

とおくと $x \otimes \bar{y} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (rank 1) であり、

$$x \otimes \bar{y} = 0 \iff x = 0 \text{ or } y = 0.$$

記号 $x \otimes \bar{y}$ は von Neumann と Schatten [5] が導入したもので大変有効性をもっており量子力学で常用される Dirac の記号では $x \otimes \bar{y} = |x><y|$ で表される。これの基本的性質はここでは略す（例へば梅垣 [11], p.268 参照)

いま、$\Gamma = [a, b]$ を閉区間とする。Γ 上で Hilbert 空間 $L^2(\Gamma)$, $L^2(\Gamma \times \Gamma)$ を考へる。2 変数(複素数値)函数 $K(\cdot,\cdot) \in L^2(\Gamma \times \Gamma)$ に対して積分作用素 K が定義される：

$$K: \ x \in L^2(\Gamma) \to (Kx)(t) = \int_\Gamma K(s,t)x(s)ds \in L^2(\Gamma).$$

この K は $L^2(\Gamma)$ 上の Hilbert-Schmidt 級作用素である。これを $K \in HS(\mathcal{H})$ $(\mathcal{H} = L^2(\Gamma))$ とかく。この K の adjoint K^* は函数表示すれば

$$K^*: \ K^*(s,t) = \overline{K(t,s)}, \ \ a.e. \ s, t \in \Gamma.$$

このとき

$$K \text{が} s.a. \iff K = \sum \lambda_n x_n \otimes \overline{x_n} \tag{1.1}$$

ここで、実数 λ_n は作用素 K の固有値、x_n は固有函数(i.e. $Kx_n = \lambda_n x_n$), $\{\lambda_n\}$ は

$$\sum |\lambda_n|^2 < +\infty$$

を満す (i.e. $\{\lambda_n\} \in l^2$)。

§2. Mercer の定理

2変数函数 $K(s,t)$ が $K(\cdot,\cdot) \in C(\Gamma \times \Gamma)$ であり、且つ、positive definite ならば、対応する積分作用素 K は trace 級である、これを $K \in \mathrm{TC}(\mathrm{L}^2(\Gamma))$ とかく。trace 級であることによって等式 (1.1) は

$$K = \sum \lambda_n x_n \otimes \overline{x_n}, \quad \sum_n \lambda < \infty, \ \lambda_n \downarrow 0 \tag{2.1}$$

茲で、$\sum$ は無限和 $\sum_{n=1}^{m} (m \to \infty)$ であり、

$$\|K - \sum \lambda_n x_n \otimes \overline{x_n}\| \ \to \ 0. \tag{2.2}$$

極限は trace-norm 及び作用素(一様)ノルムの双方で成立。従って

$$K(s,t) \ = \ \mathrm{unif} - \lim_{m\to\infty} \sum_{n\to\infty}^{m} \lambda_n x_n(s) \overline{x_n(t)}$$

及び

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \int_a^b |K(s,t) - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n(s) \overline{x_n(t)}| dsdt \ = \ 0$$

が成立する。

§3. 確率過程

2次の moment を有する L^2-連続な確率過程を与える：

$$\xi = \xi(t) = \xi(t,\cdot), \ t \in \Gamma$$

ここで base にある確率空間を $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mu)$ によって表す。この確率過程の共分散函数は

$$K_\xi(s,t) \equiv E(\overline{\xi(s,\cdot)}\xi(t,\cdot)), \ s,t \in \Gamma.$$

ξ の L^2-連続性の条件によって

$$K_\xi(\cdot,\cdot) \in C(\Gamma \times \Gamma), \ \text{且つ pos. definite.}$$

対応する積分作用素 K_ξ は $K_\xi \in \mathrm{HS}(\mathrm{L}^2(\Gamma))$ であるのみならず Mercer の定理によって

$$K_\xi \in \mathrm{TC}(\mathrm{L}^2(\Gamma)),\ \text{且つ pos. s. a.}$$

である。この K_ξ を確率過程 ξ の共分散作用素という。ここで次の様に記号を導入する：

$$\begin{aligned} \text{Hilbert 空間 } H_\xi(\Gamma) &= \overline{\mathrm{ran}} K_\xi \quad (\mathrm{L}^2(\Gamma) \text{ の閉部分空間, ran=range}) \\ \mathrm{CONS}_\xi(\Gamma) &= \mathcal{H}_\xi(\Gamma) \text{ の完全正規直交系の全体」} \end{aligned}$$

以下これ等の記号を用いる。先づ

$$\exists\{e_n\} \in \mathrm{CONS}_\xi(\Gamma):\ K_\xi = \sum p(e_n) e_n \otimes \overline{e_n} \tag{3.1}$$

つまり、 e_n は K_ξ の固有函数、$p(e_n)$ は固有値：

$$K_\xi e_n = p(e_n) e_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

次式 (3.2) の右辺の $\sum$ の収束に関しては、 Mercer の定理が適用され

$$0 \ < \int_\Gamma K_\xi(t,t)dt \ = \ \sum p(e_n) \int_\Gamma |e_n(t)|^2 dt \ = \ \sum p(e_n) \ = \ \mathrm{Tr}(K_\xi) \tag{3.2}$$

一方、$\forall\{\varphi_n\} \in \mathrm{CONS}_\xi(\Gamma)$ に対して

$$p(\varphi_n) \ = \ \int_\Omega | \int_\Gamma \varphi_n(t)\xi(t,\omega)dt|^2 d\mu(\omega) \tag{3.3}$$

と置き、(3.3) の右辺の積分演算を積分作用素と内積の形で表すと

$$p(\varphi_n) \ = \ < \varphi_n, K\varphi_n > . \tag{3.4}$$

(3.3) と (3.4) から (3.2) で用いた $p(e_n)$ は積分式 (3.3) において $\varphi_n = e_n$ とした場合で表されることは自明である。

§4. Operator Conditional Expectations

前 § では、先ず作用素 K_ξ が構成され、これの固有函数 $e_n(\cdot)$、固有値 $p(e_n)$ が得られたが、ここでは逆に、一つの $\{\varphi_n \in \mathrm{CONS}_\xi(\Gamma)\}$ を選び、各 φ_n に対して式 (3.3) によって定まる $p(\varphi_n)$ を固有値とする作用素 K'_ξ 定まるが、このとき得られる作用素間の対応関係

$$K_\xi = \sum p(e_n) e_n \otimes \overline{e_n} \ \rightarrow \ K'_\xi = \sum p(\varphi_n) \varphi_n \otimes \overline{\varphi_n}$$

は当論文の冒頭に述べた非可換 Operator Conditional Expectations の（離散的な場合の）一例である：

$$K'_\xi \ = \ E(K_\xi | \{\varphi_1 \otimes \overline{\varphi_1}, \varphi_2 \otimes \overline{\varphi_2}, \cdots\}").$$

この右辺の $\{\cdots\}''$ は作用素 $\varphi_1 \otimes \overline{\varphi_1}, \varphi_2 \otimes \overline{\varphi_2}, \cdots$ によって生成される von Neumann 代数を意味する。

以上の計算において $\{\cdots\}$ の部分を $\{\varphi_1 \otimes \overline{\varphi_1}, \varphi_2 \otimes \overline{\varphi_2}, \cdots, \varphi_n \otimes \overline{\varphi_n}\}''$ に制限し、Operator Conditional Expectations の可算列を作ることによって Operator Martingales が構成される。ここで、$n \to \infty$ とすると、Operator Martingale 収束定理を適用して極限作用素 (strong-operator-topology) が得られる。これが正に作用素 K'_ξ なのである。

ここで上述の Operator Martingale を von Neumann の記号を用いて表示する。

一般に $\mathcal{H}$ 上の射影作用素 P, Q と作用素 A に対して

$$A^{|\mathcal{P}} = PAP + (I-P)A(I-P), \quad A^{|\mathcal{P}|\mathcal{Q}} = (A^{|\mathcal{P}})^{|\mathcal{Q}}$$

などとおく。この記号法を射影作用素列

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \otimes \overline{\varphi_j}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して適用する：

$$A^{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\cdots\mathcal{P}_n} \;\equiv\; (A^{\mathcal{P}_1\cdots\mathcal{P}_{n-1}})^{\mathcal{P}_n} \; (\equiv A_n)$$

とおくと $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上述の Operator Martingale となる。このことについては 中村・梅垣 [2]、[4]、[9] を参照。

§5. Karhunen-Loéve 展開

与へられた確率過程 $\xi = \xi(t,\cdot)$ $(t \in \Gamma)$, 前 § 参照, によって生成される L^2-空間 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ の閉不部分空間を $\mathcal{H}_\xi$ で表す：

$$\mathcal{H}_\xi \;\equiv\; \overline{\mathrm{span}}\{\xi(t,\cdot); t \in \Gamma\} \; (\subset \mathrm{L}^2(\Omega)).$$

この Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\xi$ の完全正規直交系の全体の族を $\mathrm{CONS}_\xi(\Omega)$ で表す。

また Γ 上の函数列 $\{e_n\}$ (前 § 参照) を用いて $\mathrm{L}^2(\Omega)$-値 Bochner 積分により確率変数列

$$\eta_n(\cdot) \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{p(e_n)}} \int_\Gamma \xi(t,\cdot) e_n(t) dt \tag{5.1}$$

を定義する。このとき次の定理を得る

定理 5.1. 式 (5.1) によって与へられた確率変数列 $\{\eta_n\}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\xi$ において完全正規直交系である、i.e., $\{\eta_n\} \in \mathrm{CONS}_\xi(\Omega)$.

証明. 各 $\eta_n(\cdot)$ が 2 乗可積分であることは、次の積分計算の特別の場合として成立。$\forall n$ に対して $p_n \equiv p(e_n)$ と置く。

$$< \eta_m, \eta_n > \;=\; E(\overline{\eta_m}\eta_n) = \int_\Omega \overline{\eta_m(\omega)}\eta_n(\omega) d\mu(\omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= (p_m p_n)^{-1/2} \int_\Omega \int_\Gamma \int_\Gamma \overline{\xi(s,\omega) e_m(s)} \xi(t,\omega) e_n(t) ds dt d\mu(\omega) \\
&= (p_m p_n)^{-1/2} \int_\Gamma \int_\Gamma \overline{e_m(s) K_\xi(s,t)} e_n(t) ds dt \quad (K_\xi \text{ は } \S 2, \S 3 \text{参照}) \\
&= (p_m p_n)^{-1/2} \int_\Gamma \overline{e_m(s)} (K_\xi e_n)(s) ds \\
&= (p_m p_n)^{-1/2} < e_m, p_n e_n > \\
&= \delta_{m,n} \quad (\text{Kronecker } \delta)
\end{aligned}
$$

次に、$f \in \mathcal{H}_\xi$ が

$$< f, \eta_n >= 0 \quad \text{for } \forall n = 1, 2, \cdots,$$

とする。このとき

$$
\begin{aligned}
< f, \eta_n > &= \int_\Omega \overline{f(\omega)} \eta_n(\omega) d\mu(\omega) \\
&= p_n^{-1/2} \int_\Omega \int_\Gamma \overline{f(\omega)} \xi(t,\omega) e_n(t) dt d\mu(\omega) \\
&= p_n^{-1/2} \int_\Gamma (\int_\Omega \overline{f(\omega)} \xi(t,\omega) d\mu(\omega)) e_n(t) dt \\
& \qquad n = 1, 2, \cdots,
\end{aligned}
$$

であり、従って

$$\int f(\omega) \xi(t,\omega) d\mu(\omega) = 0, \quad \forall t \in \Gamma,$$

であり、$\xi(t,\omega)$ の連続性によって

$$< f, g >= 0 \quad \text{for } \forall g \in \mathcal{H}_\xi,$$

即ち $f = 0$.

ここで表記の定理に到着する

定理 5.2(K-L 展開). 確率過程 $\xi(t,\cdot)$, $t \in \Gamma$, は二つの完全正規直交系 $\{e_n\}$, $\{\eta_n\}$ によって、変数 t, ω が分離され L^2一様極限

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\Gamma} \int |\xi(t,\omega) - \sum_{k=1}^{n} p(e_k) e_k(t) \eta_k(\omega)|^2 d\mu(\omega) \;=\; 0$$

によって表示される。

これの証明は前段までの構成の延長上にあり、そこでの CONS の対 $\{e_n\}$, $\{\eta_n\}$ と確率変数の 2 乗平均収束を計算すればよい。

§. Appendix

本稿の構成は未だ終わっていない。更に非可換 Operator Conditional Expectations と Entropy, Relative Entropy などの興味ある議論が展開される。何れかの機会にそれを行い度いと思う。関連文献 [1,2,3,4,6,8,10]。

確率過程も抽象的なもので論じたが具体的な Gauss 過程などについても論ずる方向が当然控えている。

最後に本稿に直接関連のある又は関連が生ずる参考文献を列記する。

参考文献

[1] R. Ash, Information Theory, Dover Publ., 1990.

[2] M. Nakamura and H. Umegaki, On a proposition of von Neumann, Kōdai Math. Sem. Rep. 8(1956), 145-151.

[3] M. Nakamura and H. Umegaki, A note on entropy for operator algebra, Proc. Japan Acad. 37(1971), 147-154.

[4] M. Nakamura and H. Umegaki, On the von Neumann theory of measurements in quantum statistics, Math. Japonicae, 7(1962), 151-157.

[5] R. Schatten, A theory of cross-spaces, Ann. Math. Studies No.26, Princeton, 1950.

[6] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27(1948), 379-423 623-656.

[7] J. von Neumann, Collected Works, Vol.3, Rings of Operators, Pergamon Press, 1961.

[8] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, Tōhoku Math.J., Vol.6 (1954), 177-181.

[9] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, II, Tōhoku Math.J., Vol.8 (1956), 86-100.

[10] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV (Entropy and Information), Kōdai. Math. Sem. Rep. Vol.14 (1962), 59-85.

[11] 梅垣壽春、情報数理の基礎、サイエンス社（1995年）